نظرية غرين و تمارين

د. منير الترك

رياضيات 3

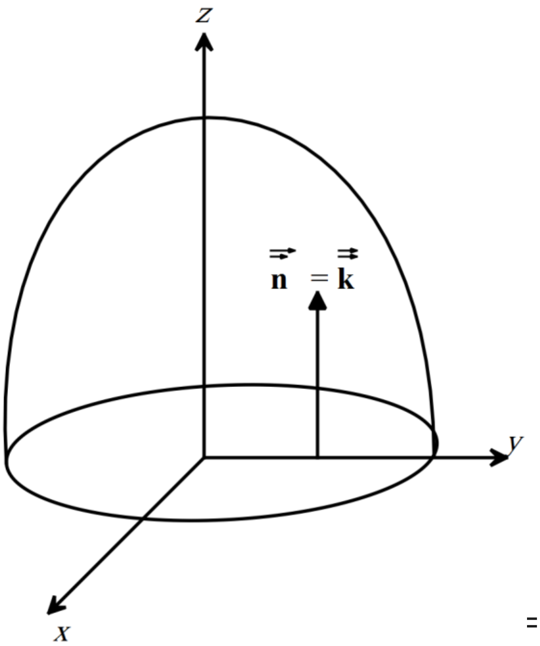
مسألة:

حقق نظرية ستوكس من أجل الحقل $\vec{F} = xy\vec{i} + x\vec{j} + zx\vec{k}$

للمنحني الناتج من تقاطع النصف العلوي للكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ و المستوي $z = 0$

الحل:

إن شروط ستوكس محققة لنأخذ الشق اليميني من ستوكس :



$$\oint \vec{F}\, d(\vec{s})$$

$$d(\vec{s}) = d(x)\vec{i} + d(y)\vec{j} + d(z)\vec{k}$$

$$\int_0^{2\pi} xyd(x) + xd(y)$$

$$= 0$$

$$x = 5\cos(\theta) \Rightarrow d(x) = -5\sin(\theta)\, d(\theta)$$
$$y = 5\sin(\theta) \Rightarrow d(y) = +5\cos(\theta)\, d(\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} 5\cos(\theta)\,.\,5\sin(\theta)\,.\big(-5\sin(\theta)\, d(\theta)\big) \pm 5\sin(\theta)\big(+5\cos(\theta)\, d(\theta)\big)$$

$$\int_0^{2\pi} -125\cos(\theta)\,.\sin^2(\theta)\,.\,d(\theta) + 25\cos^2(\theta)\,d(\theta) = \left[-\frac{125\sin^3(\theta)}{3} + 25\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin2\theta}{4}\right)\right]_0^{2\pi}$$
$$= 25\pi$$

و الان لنختبر الشق اليساري من ستوكس:

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{(\vec{\nabla} \wedge \vec{F})} d(\vec{s})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ xy & x & xz \end{vmatrix} = (0-0)\vec{i} + (0-z)\vec{j} + (1-x)\vec{k}$$

عندما نعوض بالشق الايسر من نظرية ستوكس فإن $d(\vec{s})$ يجب أن نعوضها ب $d(\vec{s}) = \hat{n}d(x)d(y)$ ونلاحظ في هذه المسألة أن k وn على استقامة واحدة وهذا يعني أن التكامل سطحي أي سطحين لهما الحافة نفسها γ تكون فيه نظرية ستوكس نفسها وبالتالي من هنا نستنتج أن الجواب يجب ان يكون هو نفسه و بالانتقال إلى الاحداثيات القطبية و بالتعويض

$$0 \le r \le 5 \qquad\qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^5 -z\vec{j} + (1-x)\vec{k} r d(r)\right] d(\theta)$$

و $z = 0$ نحصل على:

$$I = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^5 (1 - r\cos(\theta)) r d(r)\right] d(\theta) = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3\cos(\theta)}{3}\right]_0^5 d(\theta)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{25}{2} - \frac{125\cos(\theta)}{3} d(\theta)$$

$$I = 25\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{5\cos(\theta)}{3} d(\theta) = 25\left[\frac{\theta}{2} - \frac{5\sin(\theta)}{3}\right]_0^{2\pi} = 25\pi$$

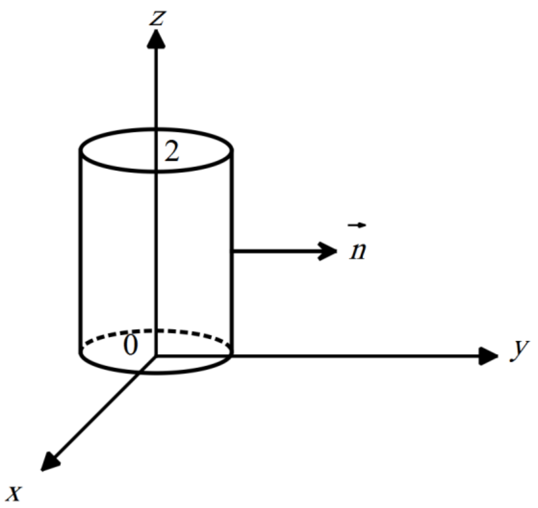
مسألة(2):سؤال دورة

حقق نظرية ستوكس للحقل: $\vec{F} = (2x - y)\vec{i} - yz^2\vec{j} - y^2z\vec{k}$

حيث أن Γ هو المنحني الناتج عن تقاطع السطح $z = 0$ مع مع نصف الكرة العلوي :
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

الجواب $\pi = \pi$

مسألة(2):



احسب تدفق الحقل $\vec{F}$

$$\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (y^2 + x + z)\vec{j} + (y + z^2)\vec{k}$$

عبر السطح $\Sigma\begin{cases} z = 0 \\ z = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

الحل:

إن السطح $x^2 + y^2 = 1$ هو عبارة عن أسطوانة دورانية قائمة محورها OZ و نصف قطرها الواحد و أما $z = 0$ و $z = 2$ فهما مستويان عموديان على محور الأسطوانة و اما السطح الموجه المغلق Σ أصبح يحيط بمنطقة فراغية اسطوانية كما في الشكل

أما Σ هو السطح الصقيل الذي يتكون من أسطوانة و مستويين وهو سطح مغلق وموجه إلى خارج المنطقة الفراغية المحدودة بالحجم وقلنا سابقا أنه في نظرية غاوص غالبا ما نستخدم الشق الحجمي والذي هو $\iiint_V \vec{\nabla}.\vec{F}d(v)$

و باستخدام الاحداثيات الاسطوانية الفراغية نلاحظ أن $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq 1$

$$0 \le z \le 2$$

لنحسب أولا $\vec{\nabla}.\vec{F}$

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = 1 + 2y + 2z$$

$$\iint [\int_0^2 1 + 2y + 2z\, d(z)]d(x)d(y) = [z + 2zy + z^2]_0^2 = 2 + 4y + 4 = 6 + 4y$$

$$\int_0^{2\pi} [\int_0^1 6 + 4r\mathrm{Sin}(\theta) r d(r)]d(\theta) = \int_0^{2\pi} \left[3r^2 + \frac{4}{3}r^3\mathrm{Sin}(\theta)\right]_0^1 d(\theta) = \int_0^{2\pi} 3 + \frac{4}{3}\mathrm{Sin}(\theta)d(\theta)$$

$$= \left[3\theta - \frac{4}{3}\mathrm{COS}(\theta)\right]_0^{2\pi} = 6\pi$$

نظرية غرين في المستوي:

وهي حالة خاصة من نظرية ستوكس وذلك عندما يكون المنحني مستوي و التابع f تابع لمتحولين فقط أي في المستوي

$$\oint_\Gamma f(x)d(x) + f(y)d(y) = \iint_\Sigma \vec{\nabla}\Lambda\vec{F}\, d(\vec{s}) = \iint \frac{\delta f(y)}{\delta x} - \frac{\delta f(x)}{\delta y} d(x)d(y)$$

حيث أن Γ منحني مغلق وΣ منطقة مغلقة و الاتجاه الموجب بعكس عقارب الساعة فإذا حسبنا $\vec{\nabla}\Lambda\vec{F}$ و كان $z = 0$ (لأننا في مستوي لذلك لايكون هنالك z)فنحصل على

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ f(x) & f(y) & 0 \end{vmatrix}$$

مسألة:

تحقق من نظرية غرين في المستوي للحقل الشعاعي:

$$\vec{F} = 2y^3\vec{i} - x^2y\vec{j}$$

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 \le 1$$

الحل:

لنأخذ الشق بنظرية غرين و الذي هو: $\iint_{\Sigma} \vec{\nabla}\Lambda\vec{F}\, d(\vec{s})$

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla}\Lambda\vec{F}\, d(\vec{s}) = \iint \frac{\delta f(y)}{\delta x} - \frac{\delta f(x)}{\delta y} d(x)d(y)$$

$$d(\vec{s}) = \hat{n}\, d(x)d(y) \quad , \hat{n} \equiv \hat{k}$$

$$\iint -2xy - 6y^2 d(x)d(y) = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(-2rCOS(\theta)Sin(\theta) - 6r^2Sin^2(\theta)\right) rd(r) \right] d(\theta)$$

الجواب $-\frac{3}{2\pi}$

و الان لناخذ الشق الاخر من نظريه غرين

$$\oint_{\Gamma} f(x)d(x) + f(y)d(y) = \int_0^{2\pi} 2Sin^3(\theta)(-Sin(\theta)d(\theta) - (COS^2(\theta))(Sin(\theta))(COS(\theta)d(\theta)$$

في التكامل الخطي نعوض الr بقيمتها أما في التكامل الثنائي فإننا نبقي الr و نعوض بقيمتها الا عند التعيض بحدود التكامل

$$\int_0^{2\pi} Sin^4(\theta)d(\theta) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^4(\theta)d(\theta) = 4\frac{3}{8}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$$

$$I = -2\left(\frac{3}{4}\pi - \int_0^{2\pi} Sin(\theta)COS^3(\theta)\, d(\theta)\right) = -\frac{3}{2}\pi$$

و من ذلك نجد تطابق كل من الجوابين اذا نظرية غرين محققة

سؤال دورة

حقق نظرية غرين في المستوي للمعادلة: $\oint_{\Gamma}(xy + y^2)d(x) + x^2 d(y)$

حيث أن Γ منحني مغلق في المنطقة $y = x^2$ $\quad$ $x = y$

و الاتجاه الموجب بعكس عقارب الساعة

الحل:

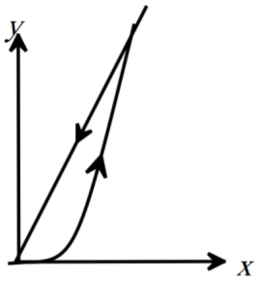
عند المكاملة يجب الأخذ بعين الاعتبار الجهة

لنطبق هذا التكامل الخطي و نستخدم الاحداثيات الديكارتية و ان المنحنيان يتقاطعان في النقطة (1,1),(0,0)

فاذا كاملنا على الx فان الx تتحول من الصفر الى الواحد على القطع ثم نكامل من جديد على المستقيم المنصف من الواحد الى الصفر (راجعين برجوع) ونجمع التكاملين لنحصل على الجواب المطلوب

$$\int_0^1 x.x^2+x^4d(x)+x^2.(2xd(x))=\int_0^1 3x^3+x^4d(x)=\left[\frac{3}{4}x^4+\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$$

لنحسب العودة:



$$\int_1^0 x.x+x^2d(x)+x^2d(x)=\int_1^0 3x^2d(x)=[x^3]_1^0=0-1=-1$$

$$I=\frac{19}{20}-\frac{20}{20}=-\frac{1}{20}$$

والان لنختبر الشق الثاني من غرين

$$\iint \frac{\delta f(y)}{\delta x}-\frac{\delta f(x)}{\delta y}d(x)d(y)=\iint 2x-x-2yd(x)d(y)=\iint x-2y\,d(x)d(y)$$

$$\int_0^1\left[\int_{y=x^2}^{y=x} x-2y\,d(y)\right]d(x)=\int_0^1 [xy-y^2]_{x^2}^{x}d(x)=\int_0^1 x^2-x^2-x^3+x^4d(x)$$

$$\int_0^1 x^4-x^3d(x)=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{20}$$

وظيفة:

حقق نظرية غرين في لمستوي للمعادلة $\oint_\Gamma (2x-y^3)d(x)-xyd(y)$

حيث أن Γ هي المنطقة المحصورة بين $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$

نقدم لكم جدول يلخص معظم قوانين التحليل الشعاعي

ملاحظات	القانون	
يؤثر التابع $\overrightarrow{grad}$ على التوابع العددية **فقط**	$\overrightarrow{grad}.U = \frac{dU}{dx}\vec{i} + \frac{dU}{dy}\vec{j} + \frac{dU}{dz}\vec{k}$	المؤثر $\overrightarrow{grad}$
يؤثر التابع $\vec{\nabla}$ على التوابع العددية و الشعاعية	$\vec{\nabla} = \frac{\delta}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta}{\delta z}\vec{k}$	المؤثر $\vec{\nabla}$
$\vec{\nabla}.U \neq U.\vec{\nabla}$ *العلاقة غير تبديلية*	$\vec{\nabla}.U = \frac{dU}{d\vec{r}} = \frac{dU}{dr}\hat{r}$	علاقة التدرج: إن التدرج هو عبارة عن الضرب السلمي (الداخلي) للمؤثر $\vec{\nabla}$ مع تابع عددي
عند اشتقاق التابع $\vec{F}$ في المؤثر نشتق كل مركبة على المحور *OX* (أي المضروبة بشعاع الواحدة $\vec{i}$) فقط بالنسبة ل *x* وكذلك بالنسبة لباقي المركبات على الـ*OX ,OZ*	$\vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\delta F}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta F}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta F}{\delta z}\vec{k}$	علاقة التفرق هو ناتج عن ضرب الداخلي للمؤثر $\vec{\nabla}$ مع تابع شعاعي
ويعني بأننا نشتق التابع مرتين عمليا كما الاشتقاق في الملاحظة السابقة و يكون الناتج عبارة عن قيمة عددية	$\nabla^2.U = \frac{U\delta 2}{\delta x^2} + \frac{U\delta 2}{\delta y^2} + \frac{U\delta 2}{\delta z^2}$	المؤثر اللابلاسياني:
التعليل $\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \left(z\frac{\delta}{\delta y} - y\frac{\delta}{\delta z}\right)\vec{i} - \left(z\frac{\delta}{\delta x} - x\frac{\delta}{\delta z}\right)\vec{j} + \left(y\frac{\delta}{\delta x} - x\frac{\delta}{\delta y}\right)\vec{k} = 0$ وإن قيمة كل مشتق من هذه المشتقات معدومة لذلك يكون معدوم	$\vec{\nabla}\wedge\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$	
$\vec{\nabla}.\vec{r} = x\frac{\delta}{\delta x} + y\frac{\delta}{\delta y} + z\frac{\delta}{\delta z} = 1 + 1 + 1 = 3$	$\vec{\nabla}.\vec{r} = 3$	

$\vec f$ هو شعاع كموني ويمكن كتابته على شكل عددي : $\vec f = \vec\nabla \; .u$	$\vec\nabla \wedge \vec f = 0$	
$\vec f$ هو شعاع لولبي	$\vec\nabla \; . \; \vec f = 0$	
u تابع توافقي	$\nabla^2 . u = 0$	
	$\vec\nabla \wedge (\mathrm{u}, \vec{\mathrm{f}}) = (\vec\nabla . u) \wedge \vec f + u(\vec\nabla \wedge \vec f)$	
	$\vec\nabla \wedge (\vec{\mathrm{f}}_1, \vec{\mathrm{f}}_2) = (\vec\nabla \wedge \vec{\mathrm{f}}_1) . \vec{\mathrm{f}}_2 - (\vec\nabla \wedge \vec{\mathrm{f}}_2) . \vec{\mathrm{f}}_1$	
أن التفاضل التام لتابع يساوي الى مجموع التفاضلات الجزئية لمركبات ذلك الاتابع	$d(u) = \frac{\delta u}{\delta x} d(x) + \frac{\delta u}{\delta y} d(y) + \frac{\delta u}{\delta z} d(z)$	
في الاحداثيات المنحنية (u, v, h)	$\vec\nabla . U = \frac{1}{h_u}\frac{\delta U}{\delta u}\hat u + \frac{1}{h_v}\frac{\delta U}{\delta v}\hat v + \frac{1}{h_w}\frac{\delta U}{\delta w}\hat w$	علاقات التدرج
في الاحداثيات الكروية	$\vec\nabla . U = \frac{\delta U}{\delta r}\hat r + \frac{1}{r}\frac{\delta U}{\delta \theta}\hat\theta + \frac{1}{rSin(\theta)}\frac{\delta U}{\delta\varphi}\hat\varphi$	علاقات التدرج
في الاحداثيات الديكارتية	$\vec\nabla . U = \frac{\delta U}{\delta x}\hat\imath + \frac{\delta U}{\delta y}\hat\jmath + \frac{\delta U}{\delta z}\hat k$	علاقات التدرج
في الاحداثيات الاسطوانية	$\vec\nabla . U = \frac{\delta U}{\delta r}\hat r + \frac{1}{r}\frac{\delta U}{\delta \theta}\hat\theta + \frac{\delta U}{\delta z}\hat z$	علاقات التدرج
في الاحداثيات المنحنية (u, v, h)	$\vec\nabla . \vec F = \frac{1}{\lambda_u\lambda_v\lambda_w}\left[\frac{\delta(\lambda_u\lambda_v\lambda_w)}{\delta u} + \frac{\delta(\lambda_u\lambda_v\lambda_w)}{\delta v} + \frac{\delta(\lambda_u\lambda_v\lambda_w)}{\delta w}\right]$	علاقات التفرق
في الاحداثيات الاسطوانية	$\vec\nabla . \vec F = \frac{1}{r}\left[\frac{\delta rf(r)}{\delta r} + \frac{\delta f(\theta)}{\delta\theta} + \frac{\delta rf(z)}{\delta z}\right]$	علاقات التفرق
في الاحداثيات الكروية	$\vec\nabla . \vec F = \frac{1}{r^2Sin(\theta)}\left[\frac{\delta r^2Sin(\theta)f(r)}{\delta r} + \frac{\delta rSin(\theta)f(\theta)}{\delta\theta} + \frac{\delta rf(\varphi)}{\delta\varphi}\right]$	علاقات التفرق

علاقات الدوران	في الاحداثيات المنحنية (u, v, h)	$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \frac{1}{\lambda_u\lambda_v\lambda_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\delta}{\delta u} & \frac{\delta}{\delta v} & \frac{\delta}{\delta w} \\ h_u f(u) & h_v f(v) & h_w f(w) \end{vmatrix}$
	في الاحداثيات الكروية	$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & rSin(\theta)\hat{\varphi} \\ \frac{\delta}{\delta r} & \frac{\delta}{\delta\theta} & \frac{\delta}{\delta\varphi} \\ f(r) & rf(\theta) & rSin(\theta)f(\varphi) \end{vmatrix}$
	في الاحداثيات الاسطوانية	$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\delta}{\delta r} & \frac{\delta}{\delta\theta} & \frac{\delta}{\delta z} \\ f(r) & rf(\theta) & f(z) \end{vmatrix}$
علاقات اللابلاسيان	في الاحداثيات المنحنية (u, v, h)	$\nabla^2.U = \frac{1}{\lambda_u\lambda_v\lambda_w}\left[\frac{\delta}{\delta u}\frac{(\lambda_v\lambda_w)}{\lambda_u} + \frac{\delta}{\delta v}\frac{(\lambda_u\lambda_w)}{\lambda_v} + \frac{\delta}{\delta w}\frac{(\lambda_u\lambda_v)}{\lambda_w}\right]$
	في الاحداثيات الاسطوانية	$\nabla^2.U = \frac{1}{r}\left[\frac{\delta}{\delta r}\frac{r\delta U}{\delta r} + \frac{\delta}{\delta\theta}\frac{\delta U}{r\delta\theta} + \frac{\delta}{\delta z}\frac{r\delta U}{\delta z}\right]$
	في الاحداثيات الكروية	$\nabla^2.U = \frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\left[\frac{\delta}{\delta r}(r^2 Sin(\theta)\frac{\delta U}{\delta r}) + \frac{\delta}{\delta\theta}(Sin(\theta)\frac{\delta U}{\delta\theta}) + \frac{\delta}{\delta\varphi}(\frac{1}{Sin(\theta)}\frac{\delta U}{\delta\varphi})\right]$